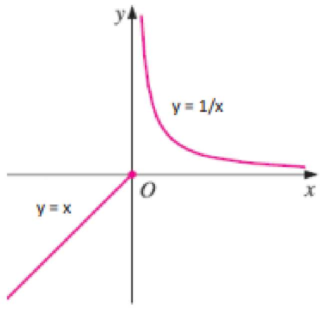

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο, σελ. 99
Α2. α. Ψευδής.



β. Χρησιμοποιούμε αντιπαράδειγμα. π.χ. θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x & \text{αν } x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{αν } x>0 \end{cases}$

η οποία είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.
Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 216
Α4. α) Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Για $x\ne 0$ έχουμε: $f'(x)=1+\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{x^3+8}{x^3}=\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^3}$

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{x^3+8}{x^3}=0\Leftrightarrow x^3+8=0\Leftrightarrow x^3=-8\Leftrightarrow x=-2$

$f'(x)>0\Leftrightarrow \dfrac{x^3+8}{x^3}>0\Leftrightarrow x^3(x+2)(x^2-2x+4)>0$

Επειδή $x^2-2x+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι: $x^3(x+2)>0\Leftrightarrow x(x+2)>0\Leftrightarrow x<-2$ ή $x>0$

Επομένως, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα (-∞,-2],(0,+∞)και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [-2,0). Επιπλέον η συνάρτηση για x = -2 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή f(-2)= -3.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f′(x)		+	0	−	‖	+	
f(x)		↗	-3	↘	‖	↗	

Β2. Η συνάρτηση f′ είναι παραγωγίσιμη για $x\ne 0$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x)=\left(\frac{x^3+8}{x^3}\right)'=\frac{(x^3+8)'x^3-(x^3+8)(x^3)'}{x^6}=\frac{3x^2x^3-(x^3+8)3x^2}{x^6}=\frac{3\cancel{x^2}(x^3-x^3-8)}{\cancel{x^6}^{\,4}}=-\frac{24}{x^4}<0$$

Επομένως είναι κοίλη σε κάθε ένα από τα διαστήματα (-∞, 0) και (0, +∞) . Έτσι η f δεν έχει σημεία καμπής.
Β3. Στα $x_0\ne 0$ η f είναι συνεχής και επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Για το $x_0\ne 0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=-\infty$.

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση x=0.
Αναζητούμε ασύμπτωτες στο $+\infty$ με εξίσωση μορφής $y = \lambda x +\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\dfrac{4}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x^3-4}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-4}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1=\lambda$.

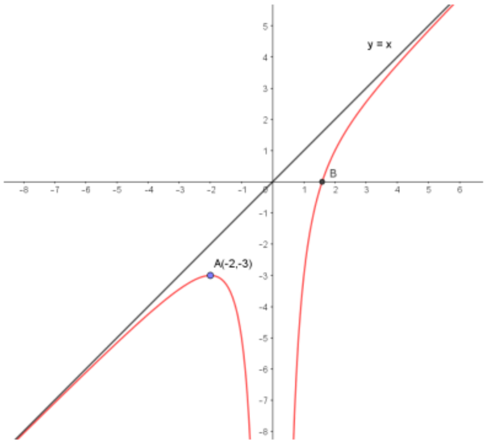
και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)=0=\beta$

Επομένως η ευθεία με εξίσωση y=xείναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.
Αναζητούμε ασύμπτωτες στο $-\infty$ με εξίσωση μορφής $y = \lambda x +\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)=0=\beta$

Επομένως η ευθεία με εξίσωση y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο $-\infty$.

Β4. Με βάση τα παραπάνω στοιχεία σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω x (σε μέτρα) το μήκος του σύρματος που θα χρησιμοποιηθεί για το τετράγωνο. Αφού το σύρμα είναι 8m, θα είναι x ∈ (0,8). Οπότε το μήκος του σύρματος που θα χρησιμοποιηθεί για τον κύκλο θα είναι (8-x) m. Η πλευρά τετραγώνου είναι $\alpha=\dfrac{x}{4}m$.

Το μήκος L=2πR του κύκλου είναι ίσο με 8-x m οπότε έχουμε $2\pi R=8-x\Leftrightarrow R=\dfrac{8-x}{2\pi}$.

Η ακτίνα του κύκλου είναι λοιπόν ίση με $R=\dfrac{8-x}{2\pi}m,\ x\in(0,8)$.

Συνεπώς η συνάρτηση του αθροίσματος των εμβαδών θα είναι:

$E(x)=\alpha^2+\pi R^2=\dfrac{x^2}{16}+\pi\dfrac{(8-x)^2}{4\pi^2}=\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(8-x)^2}{4\pi}=\dfrac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$, με $x\in(0,8)$.

Γ2. Η συνάρτηση $E'(x)=\dfrac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$, που δίνει το ολικό εμβαδό, είναι παραγωγίσιμη στο (0,8) με

$$E'(x)=\left(\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}\right)'=\frac{1}{16\pi}\left[(\pi+4)x^2-64x+256\right]'=\frac{1}{16\pi}\left[2(\pi+4)x-64\right]=\frac{1}{8\pi}\left[(\pi+4)x-32\right]$$

Ισχύει ότι $E'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{8\pi}\left[(\pi+4)x-32\right]=0\Leftrightarrow(\pi+4)x-32=0\Leftrightarrow x=\dfrac{32}{\pi+4}$

και $E'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{1}{8\pi}\left[(\pi+4)x-32\right]>0\Leftrightarrow(\pi+4)x-32>0\Leftrightarrow x>\dfrac{32}{\pi+4}$

Συνεπώς, η συνάρτηση E(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$. Οπότε η συνάρτηση E(x) έχει ελάχιστο στη θέση $x=\dfrac{32}{\pi+4}$.

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
E′(x)		−	0	+	
E(x)		↘		↗	

Η πλευρά του τετραγώνου γίνεται ίση με τη διάμετρο όταν $\dfrac{x}{4}=\dfrac{8-x}{\pi}\Leftrightarrow x=\dfrac{32}{\pi+4}$, που είναι η τιμή

για την οποία η Ε(x) έχει ελάχιστο.
Άρα, όταν η πλευρά του τετραγώνου γίνεται ίση με την διάμετρο του κύκλου, τότε το άθροισμα των εμβαδών ελαχιστοποιείται.

Γ3. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x)=\dfrac{16}{\pi}$. Η Ε(x) είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$, οπότε το σύνολο τιμών της στο A_1 είναι το $\left[E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right),\lim\limits_{x\to 0^+}E(x)\right)=\left[\dfrac{16}{\pi+4},\dfrac{16}{\pi}\right)$.

Είναι

- $\dfrac{16}{\pi+4}<5 \Leftrightarrow 16<5\pi+20 \Leftrightarrow -4<5\pi$ που ισχύει,
- $5<\dfrac{16}{\pi} \Leftrightarrow 5\pi<16 \Leftrightarrow \pi<\dfrac{16}{5}=3{,}2$ που ισχύει,

άρα υπάρχει ένα μοναδικό $x_0\in A_1$, τέτοιο ώστε $E(x_0)=5$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to 8^-}E(x)=4$.

Η Ε(x) είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$, οπότε το σύνολο τιμών της A_2 είναι το

$\left[E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right),\lim\limits_{x\to 8^-}E(x)\right)=\left[\dfrac{16}{\pi+4},4\right)$, οπότε δεν υπάρχει $x\in A_2$ τέτοιο ώστε Ε(x) = 5.

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,8)$ τέτοιο ώστε $E(x_0)=5$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f με $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$ και α > 1 είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με τύπους $2e^{x-\alpha}$ (παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων x-α που είναι πολυωνυμική και της $2e^x$, που είναι γινόμενο εκθετικής με σταθερά) και x^2 παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική) με $f'(x)=2e^{x-\alpha}$. Οπότε είναι και συνεχής.
Επίσης η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με τύπους x-α που είναι πολυωνυμική και της $2e^{x-\alpha}$(παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $2e^x$ που είναι γινόμενο εκθετικής με σταθερά) και 2x (παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική) με $f''(x)=2e^{x-\alpha}-2$.
Τότε:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2=0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}=2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}=1 \Leftrightarrow x-\alpha=0 \Leftrightarrow x=\alpha$,

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2>0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}>2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}>1 \Leftrightarrow x-\alpha>0 \Leftrightarrow x>\alpha$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2<0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}<2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}<1 \Leftrightarrow x-\alpha<0 \Leftrightarrow x<\alpha$,

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f''(x)	−	0	+
f(x)		Σ.Κ.	

Από το πρόσημο της f''(x) που φαίνεται στον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,\alpha]$και είναι κυρτή στο διάστημα $[\alpha,+\infty)$ και αφού $f''(\alpha)=0$ παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = \alpha$, δηλαδή η C_f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής το (α, f(α)) δηλαδή το $(\alpha,2-\alpha^2)$.

Δ2. Έχουμε ότι:

- $f'(\alpha)=2e^{\alpha-\alpha}-2\alpha=2-2\alpha$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^{x-\alpha}-2x)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^{x-\alpha})=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$.

και

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{x-\alpha}-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2e^{x-\alpha}\left(1-\dfrac{x}{e^{x-\alpha}}\right)\right]=+\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{x-\alpha})=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x-\alpha}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x-\alpha}}=0$.

Από το Δ1 αποδείξαμε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(-\infty,\alpha]$ και κυρτή στο $[\alpha,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\alpha]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$.

Η f' είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1=(-\infty,\alpha]$ οπότε

$f'(A_1)=\left[f'(\alpha),\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)\right)=[2-2\alpha,+\infty)$.

Η f' είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1=[\alpha,+\infty)$ οπότε

$f'(A_2)=\left[f'(\alpha),\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right)=[2-2\alpha,+\infty)$.

Αφού $\alpha>1\Leftrightarrow-2\alpha<-2\Leftrightarrow 2-2\alpha<0$, οπότε $0\in f'(A_1), 0\in f'(A_2)$ και αφού η f' είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα A_1, A_2, έπεται ότι η $f'(x)=0$ έχει από μία ακριβώς ρίζα σε κάθε ένα από τα διαστήματα A_1, A_2, ώστε $x_1\in A_1$, $x_2\in A_2$, δηλαδή $x_1<x_2$.

Συνεπώς:

Για κάθε $x\in(-\infty,x_1]$ έχουμε:

$x<x_1\Rightarrow f'(x)>f'(x_1)\Rightarrow f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,x_1]$,

Για κάθε $x\in[x_1,\alpha]$ έχουμε:

$x_1<x<\alpha\Rightarrow f'(x)<f'(x_1)\Rightarrow f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, \alpha]$,

Για κάθε $x\in[\alpha,x_2]$ έχουμε:

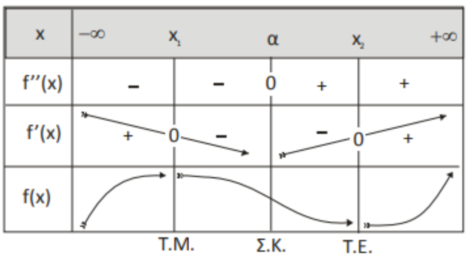
$\alpha<x<x_2\Rightarrow f'(x)<f'(x_2)\Rightarrow f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, x_2]$,

Για κάθε $x\in[x_2,+\infty)$ έχουμε:

$x>x_2\Rightarrow f'(x)>f'(x_2)\Rightarrow f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_2, +\infty)$.

Επιπλέον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο α, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1,x_2]$.

Συνεπώς η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό τοπικό μέγιστο για $x_1\in(-\infty,\alpha]$ και μοναδικό τοπικό ελάχιστο για $x_2\in[\alpha,+\infty)$.



Δ3. Επειδή $f'(x_1)=0\Rightarrow e^{x_1-\alpha}-x_1=0\Rightarrow e^{x_1-\alpha}=x_1$. Αλλά $x_1<\alpha\Rightarrow x_1-\alpha<0\Rightarrow e^{x_1-\alpha}<1\Rightarrow x_1<1$.

Ισχύει ότι $x_1<1<\alpha<x_2$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1,x_2]$, οπότε $f(1)>f(\alpha)>f(x_2)$, άρα η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ4. Για α = 2 είναι $f(x)=2e^{x-2}-x^2$ και $f'(x)=2e^{x-2}-2x$.

Η εφαπτομένη της C_f στο A(2, -2) έχει εξίσωση $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

Αφού f(2) = -2, f'(2) = -2 η παραπάνω εξίσωση γράφεται y= -2x + 2.

Λόγω της κυρτότητας της f στο $[2,+\infty)$ είναι $f(x)\ge-2x+2$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x = 2.

Άρα για κάθε $x\in[2,+\infty]$ είναι $f(x)\ge-2x+2\Leftrightarrow f(x)\ge-2(x-1)$.

Τότε πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της παραπάνω σχέσης, με $\sqrt{x-2}\ge0$ στο $[2,+\infty)$ έχουμε:

$f(x)\sqrt{x-2}\ge-2(x-1)\sqrt{x-2}$ και το ίσον ισχύει μόνο για x=2.

Τότε ισχύει $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > \int_2^3 -2(x-1)\sqrt{x-2}dx$.

Στο ολοκλήρωμα $I=\int_2^3 -2(x-1)\sqrt{x-2}dx$ θέτουμε u=x-2 οπότε είναι du=dx, οπότε είναι x-1 = u+1.

Τα όρια ολοκλήρωσης γίνονται

x	u=x-2
x= 2	u=0
x = 3	u=1

$$I=\int_0^1 -2(u+1)\sqrt{u}du=-2\int_0^1\left(u\sqrt{u}+\sqrt{u}\right)du=-2\int_0^1\left(u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}}\right)du=$$

$$=-2\left[\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1=-2\left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=-4\left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1=-4\left[\left(\frac{1^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{1^{\frac{3}{2}}}{3}\right)-\left(\frac{0^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{0^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\right]=$$

$$=-4\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=-4\frac{3+5}{15}=-\frac{32}{15}$$, οπότε είναι $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>-\frac{32}{15}$.