**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν

* η f είναι συνεχής στο [α, β] και
* f (α) $\ne $ f (β),

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον xο $\in $ (α, β) τέτοιος, ώστε f(xο)= η.

**Μονάδες 7**

**Α2.** Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f , ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο , ισχύει f’(x) > 0».

**α)** Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

(μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** , για κάθε ν$\in $

**β)** Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β, αντίστοιχα, τότε η g f ορίζεται, αν f(A)$∩$B$\ne ∅$.

**γ)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  έχει άξονα συμμετρίας τον y'y.

**δ)** Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

**ε)** Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο  και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα x'x. Αν υπάρχει κάποιο σημείο A(xo, f(xo)) της Cf, του οποίου η απόσταση από τον άξονα x'x είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της Cf είναι οριζόντια.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις:

f: (1, +$\infty $) 🡪  , με τύπο  και

g: , με τύπο g(x) = ex.

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fg.

**Μονάδες 5**

**Β2.** Αν  , x > 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fg είναι ‘1-1’ και να βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 8**

**Β3.** Αν  , με x > 1, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 6**

**Β4.** Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Β3**, να βρεθούν τα όρια

 και 

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

 , με λ > 0.

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι λ=1

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0, 1), η οποία σχηματίζει με τον άξονα x’x γωνία ίση με  .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Ένα σημείο Μ(α, f(α)), με α $\leq $ 0, κινείται στη γραφική παράσταση της f.

Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ δίνεται από τον τύπο α’(t) = -  .

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Μ τέμνει τον άξονα x’x στο σημείο Β. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t0, κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση f:  με τύπο f(x) = ex + x2 –ex – 1.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x0$\in $(0, 1), στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

f(x0) = x02 – (e + 2) x0 + e – 1.

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο

 ,

όπου x0 το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Αν x0 είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)+x = xo για x$\in $(xο, 1) έχει μοναδική ρίζα ρ.

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Αν x0 είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι f(xo) > f(ρ) (f’(k) +1) για κάθε k$\in $(ρ, 1).

**Μονάδες 7**