**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν f’(x) >0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

**Μονάδες 7**

**Α2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής .

**Μονάδες 4**

**Α3.** Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες ;

**Μονάδες 4**

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Ισχύει , για κάθε .

**β)** Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ισχύει ότι , για κάθε x∈A.

**γ)** Αν , τότε f(x) > 0 κοντά στο x0 .

**δ)** Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν f’’(x)>0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

**ε)** Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β], τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή, Μ, και μια ελάχιστη τιμή, m.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση f:  για την οποία ισχύει ότι , για κάθε .

**Β1.** Να δείξετε ότι .

**Μονάδες 3**

**Β2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 6**

**Β3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

**Μονάδες 9**

**Β4.** Να βρείτε :

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (μονάδες 4).

(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x) = λ, για τις διάφορες τιμές του λ. (μονάδες 3).

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση 

**Γ1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο x0 = 0 (μονάδες 3).

**Μονάδες 6**

**Γ2.** (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο  (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό  για το οποίο ισχύει f’(ξ) = 0 (μονάδες 3).

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα x’x .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να δείξετε ότι f(x) ≥ -1, για κάθε .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Να δείξετε ότι η εξίσωση

 (1)

έχει μοναδική ρίζα, x0, η οποία ανήκει στο (1, e).

**Μονάδες 4**

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση f:(0, +∞) 🡪  έχει τύπο .

**Δ2.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x0, το f(x0) = 0.

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

 και 

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

**Μονάδες 8**

**Δ4.** Έστω η συνάρτηση φ: (0, +∞)🡪, συνεχής, με f(x) > φ(x) , για κάθε x > 0. Θεωρούμε τα σημεία A(x,f(x)) και B(x,φ(x)) , με x > 0. Αν η απόσταση των σημείων A και B γίνεται ελάχιστη στο x = x0, να δείξετε ότι το x0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ .

**Μονάδες 7**