**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**Ενδεικτικές απαντήσεις**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Απόδειξη σελίδα 186 σχολικού βιβλίου.

**Α2.** Ορισμός σελίδα 142 σχολικού βιβλίου.

**Α3.** Ορισμός σελίδα 161 σχολικού βιβλίου.

**Α4.**

α. ΣΩΣΤΟ

β. ΣΩΣΤΟ

γ. ΣΩΣΤΟ

δ. ΛΑΘΟΣ

ε. ΛΑΘΟΣ

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.** Για το πεδίο ορισμού της fog πρέπει:



Με τύπο:



**Β2.** στο [0,1] άρα h γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της h άρα h 1-1 ως γνησίως μονότονη συνάρτηση.

Για τον τύπο της θέτω :



Και επίσης το σύνολο τιμών της h είναι:



Το σύνολο τιμών της h είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της άρα:



**B3.** i) o Η φ είναι συνεχής στο [0,1) ως πράξεις συνεχών και στο 1 διότι:









Άρα , από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των φ(0) και φ(1) υπάρχει τουλάχιστον ένα ώστε .

ii) Δίνεται ότι , άρα το α ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο όπου εκεί το ημίτονο είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, οπότε:



Άρα, από το προηγούμενο ερώτημα, για κάθε αριθμό ημα μεταξύ των και υπάρχει τουλάχιστον ένα  ώστε .

**ΘΕΜΑ Γ**

 **Γ1.** Έχουμε ότι .

Για είναι .

Από συνέπεια του ΘΜΤ υπάρχει τέτοιο ώστε .

Για , είναι 

Από συνέπεια του ΘΜΤ υπάρχει τέτοιο ώστε 

Από την υπόθεση δίνεται ότι f(0)=0, επομένως για x=0 έχουμε



Άρα για  είναι τελικά 

Επομένως, έχοντας υπόψιν ότι η f ορίζεται στο , ο τύπος της f μπορεί να γραφεί



Εδώ είναι







Η f είναι συνεχής στο R, άρα και στο 1, επομένως



Δηλαδή και κ=0.

Τελικά ο τύπος της f γίνεται .

**Γ2.** Η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο είναι



δηλαδή:



Η (ε) τέμνει τον άξονα y’y στο -2 άρα το σημείοεπαληθεύει την (ε).

Οπότε για , έχουμε



Άρα η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης είναι η ευθεία



**Γ3.** Το σημείο , βρίσκεται πάνω στην ευθεία , άρα είναι .

Η προβολή του Μ πάνω στον άξονα x’x είναι το σημείο 

Το εμβαδό του τριγώνου ΜΚΓ δίνεται από τη σχέση



Θεωρούμε τη συνάρτηση του εμβαδού Ε ως προς το χρόνο που είναι η



Η Ε είναι παραγωγίσιμη ως προς t ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο



Από την υπόθεση, για τη χρονική στιγμή , έχουμε ότι



Άρα



**Γ4.** Έχουμε 

Είναι 

Υπολογίζουμε ξεχωριστά το όριο 

Είναι 

Όμως , επομένως 

Από ιδιότητες απόλυτων τιμών προκύπτει 

Όμως, 

Και 

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής θα είναι και 

και ξεχωριστά το όριο 

Θέτω , όταν το  τότε το ,

οπότε από 

παίρνουμε ότι 

Το όριο ισοδύναμα γίνεται



Τελικά το ζητούμενο όριο ισούται με



**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο  ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο



Είναι 

και 

Το πρόσημο της f’ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα



Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα για  και γνησίως αύξουσα για .

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=1 το 

Έχουμε ότι



και 

Επειδή 

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (0, 1], επομένως

και .

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον  τέτοιο ώστε f(x1) = 0.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, 1], επομένως και «1-1», άρα το x1 είναι μοναδικό.

Ακόμη

 και

 διότι

.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (1, +∞), επομένως

.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον  τέτοιο ώστε f(x2) = 0.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1], άρα και «1-1», άρα το x2 είναι μοναδικό.

Επομένως υπάρχουν ακριβώς δύο  και  τέτοια ώστε .

ii) Η f’ είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο



Επομένως η f είναι κυρτή στο (0, +∞).

**Δ2.** Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο , άρα και στο [x1, x2] .

Το ζητούμενο εμβαδό είναι .

Παρατηρούμε από τον πίνακα μονοτονίας της f ότι για  η f δε μηδενίζεται (από ερώτημα Δ1α) και είναι συνεχής. Επομένως από συνέπειες Θεωρήματος Bolzano θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή  και , θα είναι f(x) < 0 για κάθε .

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό γράφεται



Εδώ έχουμε

και



 

 

 

 

 

Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι  και



Δηλαδή το ολοκλήρωμα γίνεται

 

Επομένως



**Δ3.** Από το προηγούμενο ερώτημα είναι 

Όμως είναι 

Επομένως



Επειδή  είναι 

Σε αυτό το διάστημα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως



Δ4. Η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο x2 είναι



Η f είναι κυρτή, άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη ευθεία.

Άρα  και η ισότητα ισχύει μόνο για x = x2.

Παρατηρούμε ακόμη ότι .

Με αυτά υπόψιν, η ζητούμενη σχέση γράφεται διαδοχικά







Είδαμε ότι η f έχει στο x = 1 ολικό ελάχιστο, επομένως

 με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 1.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.