ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

(ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α.
Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 111
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 104
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 128
Α4.
α) Λάθος
β) Λάθος
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β.
Β.1 Για το πεδίο ορισμού της $f = g \circ h$.

$$D_{g\circ h} = \left\{x \in D_h \,/\, h(x) \in D_g\right\} = \{x > 0 \,/\, \ln x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$$

Για τον τύπο της f έχουμε

$$f(x) = g(h(x)) = g(\ln x) = \frac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4 - x^2}{x}, x > 0$$

Β.2
i. Η f είναι συνεχής στο $(0,\ +\infty)$ ως ρητή και παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{-2x \cdot x - \left(4 - x^2\right)}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} = \frac{-\left(x^2 + 4\right)}{x^2} < 0$$

στο $(0,\ +\infty)$, οπότε η f $γνήσια\ φθίνουσα$ στο $(0,\ +\infty)$.

$η\ f \downarrow$

ii. Έχουμε: $\pi > e \Rightarrow f(\pi) < f(e) \Rightarrow \dfrac{4 - \pi^2}{\pi} < \dfrac{4 - e^2}{e} \Rightarrow$

$e \cdot \left(4 - \pi^2\right) < \pi \cdot \left(4 - e^2\right)$ διαιρούμε με $e \cdot \left(4 - e^2\right) < 0$ οπότε προκύπτει: $\dfrac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \dfrac{\pi}{e}$

Β.3.
Κατακόρυφη (υποψήφια η $x = 0$)

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4 - x^2}{x} = +\infty$, άρα η x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Οριζόντια – Πλάγια

Έχουμε $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{x^2}{x} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{4}{x} - x \Leftrightarrow f(x) - (-x) = \dfrac{4}{x}$

με $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4}{x} = 0$, άρα $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - (-x)] = 0$

οπότε από τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης η ευθεία $y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f $στο\ +\infty$.
Οριζόντια ασύμπτωτη δεν έχει.

Β4.

Για το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}$ υπολογίζουμε πρώτα το όριο της $f(x)$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty.$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $y=\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)$ είναι φραγμένη, αφού ισχύει

$-1\le\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\le1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right|\le1$

Έχουμε $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\right|=\frac{\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right|}{|f(x)|}\le\frac{1}{|f(x)|}$.Αρα $-\frac{1}{|f(x)|}\le\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{|f(x)|}\le\frac{1}{|f(x)|}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|f(x)|}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|}=0$ από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}=0.$

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Η f στο [2,3] έχει τύπο $f(x)=\frac{1}{x}+\alpha$ και η

$y=x\cdot f(x)=x\cdot\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)=1+\alpha\cdot x$ είναι συνεχής οπότε

$$\int_2^3 xf(x)dx=\int_2^3(1+\alpha x)dx=\left[x+\alpha\frac{x^2}{2}\right]_2^3=\left(3+\frac{\alpha}{2}\cdot9\right)-\left(2+\alpha\cdot\frac{2^2}{2}\right)=$$

$3+\frac{9\alpha}{2}-2-\frac{4\alpha}{2}=1+\frac{5\alpha}{2}$ οπότε $1+\frac{5\alpha}{2}=1\Leftrightarrow\alpha=0$

Γ2. i) Θα αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{(x-2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x-2)=-1$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1-x}{x-1}}{\frac{x-1}{1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{-1}{x}=-1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=-1$.

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$(\varepsilon):\quad y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Leftrightarrow$

$y-1=-1\cdot(x-1)\Leftrightarrow y-1=-x+1\Leftrightarrow y=-x+2$

Επειδή $f'(1)=-1 \Leftrightarrow εφω=-1 η ω=135^\circ$ αφού $0^\circ \le ω < 180^\circ$.

Γ3. Έχουμε $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3, x<1 \\ \dfrac{1}{x} \quad , \ x\ge 1 \end{cases}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ με $f'(x)=2x-3$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ (ερώτημα Γ2i) άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Στο $(-\infty,1)$ η $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ (απορρίπτεται).

Στο $(1,+\infty)$ η $f'(x)\neq 0$

Για το πρόσημο της $f'(x)$ έχουμε

Στο $(-\infty,1): x<1 \Rightarrow x<\dfrac{3}{2} \Rightarrow 2x-3<0 \Rightarrow f'(x)<0$

Στο $(1,+\infty): f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$. Επίσης $f'(1)=-1$ άρα

$f'(x)<0$ για κάθε $χ\in\mathbb{R}$ οπότε η f γνήσια φθίνουσα στο R άρα και 1-1.

Για το σύνολο τιμών της:

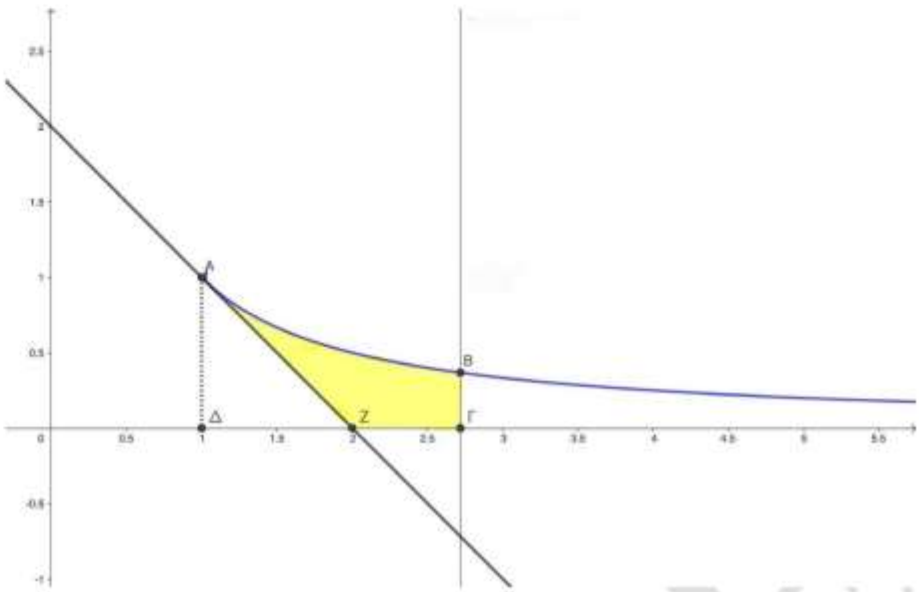
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-3x+3\right)=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Άρα με f γνήσια φθίνουσα παίρνουμε

$$f((-\infty,+\infty))=\left(\lim_{+\infty} f(x),\lim_{-\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$$

Γ4. Ζητείται εμβαδόν ενός χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων, της f $f(x)=\dfrac{1}{x}$, της $(ε): y=-x+2$ και του x'x άξονα δηλαδή της y = 0. Θα κάνουμε σχήμα.



Είναι: $A(1,1), \Delta(1,0), \Gamma(e,0), Z(2,0)$

Το $E(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.
Το ζητούμενο εμβαδό θα το υπολογίσουμε ως τη διαφορά του $(A\Delta Z)$ από το εμβαδό $(A\Delta\Gamma B)$.

Έχουμε $(A\Delta\Gamma B) = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_1^e = [\ln x]_1^e =$

$\ln e - \ln 1 = 1$τ.μ.

$(A\Delta Z) = \frac{1}{2}\cdot(\Delta Z)\cdot(A\Delta) = \frac{1}{2}\cdot(2-1)\cdot 1 = \frac{1}{2}$τ.μ.

Άρα $E(\Omega) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1.

Για $x \in (0,2)$ *και* $x \neq 1$ θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)-2x}{x-1}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \ell$.

Έχουμε $f(x) - 2x = (x-1)\cdot g(x) \Leftrightarrow f(x) = 2x + (x-1)\cdot g(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}[2x + (x-1)\cdot g(x)] = 2 + 0\cdot\ell = 2$

Επίσης, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + x\right] = \ln 1 - 1 + x = x - 1$

Άρα $\kappa - 1 = 2 \Leftrightarrow \kappa = 3$, οπότε $f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3, x \in (0,2)$

Δ2.

Η f είναι συνεχής στο (0,2) ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{1}{2-x}\cdot(2-x)' + \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+x-2}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -2$ (απορρ.)

Για το πρόσημο της $f'(x)$ έχουμε

x		0		1		2	
x^2+x-2			-	0	+		
$x-2$			-		-		
x^2			+		+		
$f'(x)$			+	0	-		
$f(x)$			↗		↘		

ΟΜ

$f(1) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$ και $\ln 2 + 3 \in \mathbb{R}$.

Ακόμη

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to 2^-}\ln(2-x) = \left(\text{θέτω} 2 - x = u \text{ οπότε } u \to 0^+\right) = \lim\limits_{u\to 0^+}\ln u = -\infty$

Οπότε με f γνήσια αύξουσα στο $(0,1]: f((0,1]) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$.

Το $0 \in (-\infty, 2]$ οπότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0,1)$ ώστε $f(x_1) = 0$ και αφού η f γνησίως αύξουσα στο (0,1) το x_1 μοναδικό με $x_1<1$.

$f((1,2)) = \left(\lim\limits_{x\to 2^-} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right) = (-\infty, 2)$.

Το $0 \in (-\infty, 2]$ οπότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (1,2)$ ώστε $f(x_2) = 0$ και αφού f γνησίως φθίνουσα στο (1,2) το x_2 μοναδικό με $x_2 > 1$.

Άρα η f(x)=0 έχει ακριβώς 2 ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$.

Επειδή $f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3 = \ln\frac{5}{3} - 3 + 3 = \ln 5 - \ln 3 > 0$, άρα η ρίζα $x_1 < \frac{1}{3}$.

Σημείωση:

Έχουμε: $5 > 3 \overset{y=\ln x \uparrow}{\Rightarrow} \ln 5 > \ln 3 \Rightarrow$
$\ln 5 - \ln 3 > 0$

Δ3.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = \dfrac{3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$.

Αφού $x_1 < \frac{1}{3}$, ορίζεται το διάστημα $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ ως πράξεις συνεχών.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$.

Άρα από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - 0}{\frac{1 - 3x_1}{3}} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$$

Ακόμη

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0 .$$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα άρα το ξ είναι μοναδικό.

Δ4.

i. Αφού F, G αρχικές συναρτήσεις της f στο (0,2) θα ισχύουν

$F'(x) = f(x), G'(x) = f(x)$ και $F(x) = G(x) + C$

Η(1) για $x = x_1 : F(x_1) = G(x_1) + C \Leftrightarrow 0 = G(x_1) + C \Leftrightarrow$

$C = -G(x_1)$.

Η (1) για $x=x_2: F(x_2)=G(x_2)+C \Leftrightarrow F(x_2)=0+C$

$\Leftrightarrow F(x_2)=C$

Έτσι: $-G(x_1)=F(x_2) \Leftrightarrow F(x_2)+G(x_1)=0$

ii. Θεωρώ $h(x)=x_1\cdot F(x)+x_2\cdot G(x_2)+2x-x_1-x_2, x\in[x_1,x_2]$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών, αφού $F(x),G(x)$ είναι συνεχείς ως παραγωγίσιμες.

$h(x_1)=\cancel{x_1\cdot F(x_1)}+x_2G(x_1)+2x_1-x_1-x_2=x_2\cdot G(x_1)+x_1-x_2=$

$=-x_2F(x_2)+x_1-x_2$ αφού $G(x_1)=-F(x_2)$

$h(x_2)=x_1F(x_2)+\cancel{x_2G(x_2)}+2x_2-x_1-x_2=x_1\cdot F(x_2)+x_2-x_1$

Είναι $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in(0,2)$ οπότε $x_1<x<1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x)\Rightarrow 0<f(x)$ και

$1<x<x_2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x)>f(x_2)\Rightarrow f(x)>0$ οπότε η f(x)>0 στο $(x_1,x_2)\Rightarrow F'(x)>0$ στο (x_1,x_2) οπότε $F\uparrow$ στο (x_1,x_2).

Για $x_1<x_2 \overset{F\uparrow}{\Rightarrow} F(x_1)<F(x_2)\Rightarrow 0<F(x_2)$

Άρα, $-x_2F(x_2)<0$ και επειδή $x_1-x_2<0$ έχουμε $h(x_1)<0$.

Επίσης $x_1F(x_2)>0, x_2-x_1>0\Rightarrow h(x_2)>0$.

Άρα $h(x_1)\cdot h(x_2)<0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano έχουμε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $h(x)=0$ στο (x_1,x_2).

Για την μοναδικότητα:

$h'(x)=x_1\cdot F'(x)+x_2\cdot G'(x)+2=$

$=x_1f(x)+x_2f(x)+2>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$.

Άρα η h *γν. αύξουσα* στο $[x1, x2]$ οπότε η ρίζα που εξασφαλίσαμε με το Θ. Bolzano είναι μοναδική