ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x0, τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x0 και ισχύει: 

Μονάδες 6

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.α) Ισχύει ότι .

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.
γ) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, ισχύει ότι  σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

δ) Αν η είναι μια «ένα προς ένα» (“1-1”) συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f−1 είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xΟy
και x'Οy'.

ε) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι fοg και gοf , τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  με τύπο και η συνάρτηση με τύπο .

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση .

Μονάδες 5

Έστω .
Β2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι  (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: .

όπου α ∈ R , για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι .

Γ1. Να αποδείξετε ότι α =0.

Μονάδες 4

Γ2. i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη x0=1 (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x' x (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Γ3. Nα αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» (“1-1”) (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ4. Έστω  η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με x ≥ 1, την ευθεία (ε), τον άξονα x ' x και την ευθεία x=e.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση με τύπο: 

για την οποία ισχύει: 

Δ1. Να αποδείξετε ότι κ=3.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) 0 = έχει ακριβώς δύο ρίζες x1, x2 με (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα, x1 και x2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με .

Μονάδες 6

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα (0,2)με , να αποδείξετε ότι:

i) (μονάδες 4)

ii) η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x1,x2)

(μονάδες 5)
Μονάδες 9