**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**(Ενδεικτικές απαντήσεις)**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Σχολικό βιβλίο – Σελίδα 186

**Α2.** Σχολικό βιβλίο – Σελίδα 76

**Α3.** Σχολικό βιβλίο – Σελίδα 161

**Α4.** α) Σωστό

 β) Σωστό

 γ) Λάθος

 δ) Λάθος

 ε) Σωστό

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.** Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  ως πολυωνυμική και παρουσιάζεται στο x0 = 1 τοπικό ακρότατο. Επομένως, από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι f’(1) = 0.

Για κάθε ισχύει ότι . Επομένως, .

**Β2.** Για α = -6 είναι  και . Για κάθε λύνουμε την εξίσωση .

H τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα  και ρίζες x1 = 1 ή x2 = 3. Επομένως, έχουμε τον παρακάτω πίνακα.



Έστω Δ1 = (-∞, 1], όπου η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Είναι , άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον  τέτοιο ώστε f(x1) = 0 και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ1, η ρίζα x1 είναι μοναδική.

Θα αποδείξουμε ότι x1 > 0 . Έστω ότι x1 ≤ 0 τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ1 θα είναι  που είναι άτοπο. Άρα, x1 > 0.

Έστω Δ2 = (1, 3), όπου η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Είναι , άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον τέτοιο ώστε f(x2) = 0 και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ2, η ρίζα x2 είναι μοναδική.

Έστω Δ3 = [3, +∞), όπου η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Είναι , άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον τέτοιο ώστε f(x3) = 0 και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ3, η ρίζα x3 είναι μοναδική.

Επομένως, η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς τρεις θετικές ρίζες.

**Β3.** Είναι , άρα  για κάθε . Έχουμε:

* 
* 
* 

Επομένως, έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών



Η f είναι κυρτή στο [2, +∞), κοίλη στο (-∞, 2] και έχει σημείο καμπής το Κ(2, f(2)) δηλαδή το Κ(2, -1).

**Β4.** Για κάθε έχουμε ότι g(x) = x + f(x), άρα g’(x) = 1 + f’(x) (1). Έστω (ε1) η εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο Α(ξ, f(ξ)). Τότε:

ε1: 

Για x = 0 η ε1 γίνεται 

Επομένως, η ε1 τέμνει τον άξονα y’y στο (0, -ξf’(ξ) + f(ξ))

Έστω (ε2) η εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο Β(ξ, g(ξ)).

Τότε:

ε2: 

Για x = 0 η ε2 γίνεται 

Επομένως, η ε2 τέμνει τον άξονα y’y στο (0, -ξg’(ξ) + g(ξ)).

Αρκεί να αποδείξουμε ότι 



Τελικά, οι (ε1), (ε2) τέμνονται στον άξονα y’y.

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Είναι . Έχουμε:

* 
* 
* 

Άρα, , οπότε η f είναι συνεχής στο x0 = 0.

Επίσης,

* , άρα το .

Δεν υπάρχει στο , οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x0= 0.

**Γ2.** Η f για x < 0 είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών και για x > 0 είναι συνεχής ως ρίζα συνεχούς συνάρτησης. Επίσης, από το Γ1 έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο x0= 0.

Επομένως, η f είναι συνεχής στο , οπότε η f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Ψάχνουμε για πλάγιες – οριζόντιες στα +∞ και -∞

* . Άρα, λ = 1.



. Άρα, .

Άρα, η  είναι πλάγια ασύμπτωτη της Cf στο +∞



Υπολογίζουμε το  με κριτήριο παρεμβολής

, άρα 

. Επίσης, .

Άρα, (1) . Έτσι, λ = 0.



Υπολογίζουμε το  με κριτήριο παρεμβολής . Άρα



. Οπότε β = 0.

Άρα, η y = 0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο -∞.

**Γ3.** Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο [-π, 0].

Στο ερώτημα Γ2 έχουμε δείξει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο .

Έστω συνάρτηση , ορισμένη στο [-π, 0].

Η g είναι συνεχής στο [-π, 0] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε:





Άρα, g(0) ∙ g(-π) < 0, οπότε από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση  έχει μία τουλάχιστον ρίζα ξ∈(-π, 0).

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία (ε):  σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη ξ∈(-π,0).

**Γ4.** Είναι .

Έστω t0 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης x του Μ. Δηλαδή, ισχύει .

Είναι 

Για t = t0 έχουμε 





, που είναι άτοπο.

Επομένως, δεν υπάρχει χρονική στιγμή t0 τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του Μ να είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του Μ.

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Η f είναι μια παράγουσα της f στο (0, +∞), άρα F’(x) = f(x) για κάθε x > 0.

Επίσης, για κάθε x > 0 ισχύει 

Η συνάρτηση g για x > 0 γράφεται  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με



 .

Επομένως, η συνάρτηση g είναι σταθερή στο (0, +∞).

**Δ2.** i) Για κάθε  έχουμε .

Άρα,

 , γιατί η f είναι συνεχής στο 1. Για x > 0 ισχύει xf(x) = 2F(x) ∙ lnx επομένως 





επομένως η f΄ είναι συνεχής στο (0,+∞), ως πράξη συνεχών.

Η εφαπτομένη της Cf είναι παράλληλη στην ευθεία y = 2x, επομένως f’(1) = 2.

Άρα, 

**Β’ τρόπος**

Για x > 0 ισχύει ότι xf(x) = 2F(x) ∙ lnx. Άρα, για x = 1 η τελευταία γίνεται f(1) = 2F(1) ln1 . H εφαπτομένη της Cf είναι παράλληλη στην ευθεία y = 2x, επομένως f’(1) = 2. Έτσι,



Έχουμε:

* 
* 



ii) Η F είναι συνεχής στο 1 ως παραγωγίσιμη, άρα για x > 0, οπότε

, άρα   , άρα F(1) = 1.

**Β’ τρόπος**

Για x > 0 έχουμε  

Η (2) για x = 1 γίνεται  .

Η συνάρτηση g είναι σταθερή στο (0, +∞), άρα υπάρχει  τέτοια ώστε

 .

Για x = 1 έχουμε 

Άρα, .

**Δ3.** Είναι 



Για x > 0 έχουμε:

* 
* 
* 

Επομένως έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών



Επειδή η F είναι συνεχής στο (0, +∞) έχουμε ότι:

* η F είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, 1]
* η F είναι γνησίως αύξουσα στο [1, +∞)

Η εξίσωση  έχει προφανή ρίζα τη x = 1.

Έχουμε:

* για 

και (x – 1)2 > 0. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε .

* για 

και (x – 1)2 > 0. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε .

Άρα, η x = 1 είναι μοναδική ρίζα της .

**Δ4.** Το εμβαδό του χωρίου μεταξύ των CF, x = 1, x = e και τον άξονα x’x είναι 

Για  .

Για κάθε  ισχύει ότι  και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0. Άρα,  και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 1.

Έτσι  (1).

Υπολογίζουμε

* 





 (2)

*  (3)

Άρα, (1) 



.