

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

(Ενδεικτικές απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο – Σελίδα 186**A2.** Σχολικό βιβλίο – Σελίδα 76**A3.** Σχολικό βιβλίο – Σελίδα 161**A4.** α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και παρουσιάζεται στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο. Επομένως, από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι $f'(1) = 0$.Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$. Επομένως, $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = -6$.**B2.** Για $\alpha = -6$ είναι $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ και $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$.Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ και ρίζες $x_1 = 1$ ή $x_2 = 3$. Επομένως, έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$	↗	↘	↗	

Έστω $\Delta_1 = (-\infty, 1]$, όπου η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Είναι $f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1 , η ρίζα x_1 είναι μοναδική.Θα αποδείξουμε ότι $x_1' > 0$. Έστω ότι $x_1' \leq 0$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1 θα είναι $f(x_1) \leq f(0) \Leftrightarrow f(x_1) \leq -3$ που είναι άτοπο. Άρα, $x_1 > 0$.Έστω $\Delta_2 = (1, 3)$, όπου η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Είναι $f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (-3, 1)$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 , η ρίζα x_2 είναι μοναδική.Έστω $\Delta_3 = [3, +\infty)$, όπου η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Είναι $f(\Delta_3) = \left[f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-3, +\infty)$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_3 \in [3, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_3) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_3 , η ρίζα x_3 είναι μοναδική.Επομένως, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις θετικές ρίζες.**B3.** Είναι $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, άρα $f''(x) = 6x - 12$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 12 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x - 12 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΠΥΛΑΙΑ ΡΕΘΥΜΝΟ

Επομένως, έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\curvearrowright$	$\uparrow$	$\curvearrowleft$

Η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$, κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και έχει σημείο καμπής το $K(2, f(2))$ δηλαδή το $K(2, -1)$.

B4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $g(x) = x + f(x)$, άρα $g'(x) = 1 + f'(x)$ (1). Έστω (ε_1) η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$. Τότε:

$$\varepsilon_1: y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi) \cdot x - \xi f'(\xi) + f(\xi)$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ η } \varepsilon_1 \text{ γίνεται } y = -\xi f'(\xi) + f(\xi)$$

Επομένως, η ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, -\xi f'(\xi) + f(\xi))$

Έστω (ε_2) η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $B(\xi, g(\xi))$.

Τότε:

$$\varepsilon_2: y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = g'(\xi) \cdot x - \xi \cdot g'(\xi) + g(\xi)$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ η } \varepsilon_2 \text{ γίνεται } y = -\xi \cdot g'(\xi) + g(\xi)$$

Επομένως, η ε_2 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, -\xi g'(\xi) + g(\xi))$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $-\xi \cdot f'(\xi) + f(\xi) = -\xi \cdot g'(\xi) + g(\xi)$

$$\Leftrightarrow -\xi \cdot f'(\xi) + f(\xi) = -\xi \cdot g'(\xi) + g(\xi)$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -\xi \cdot f'(\xi) + f(\xi) = -\xi(1 + f'(\xi)) + \xi + f(\xi)$$

$$\Leftrightarrow -\xi \cdot f'(\xi) + f(\xi) = -\xi + \xi f'(\xi) + \xi + f(\xi) \Leftrightarrow 0 = 0 \quad \text{που ισχύει}$$

Τελικά, οι (ε_1) , (ε_2) τέμνονται στον άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f(x) = \begin{cases} e^x \cdot \eta \mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$. Έχουμε:

- $f(0) = \sqrt{0^2 + 0} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \eta \mu x = e^0 \cdot \eta \mu 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = \sqrt{0^2 + 0} = 0$

Άρα, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Επίσης,

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{x > 0}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty, \text{ άρα το } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}. \end{aligned}$$

Δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. Η f για $x < 0$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών και για $x > 0$ είναι συνεχής ως ρίζα συνεχούς συνάρτησης. Επίσης, από το Γ1 έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Επομένως, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Ψάχνουμε για πλάγιες – οριζόντιες στα $+\infty$ και $-\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

Άρα, $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x} \stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}. \text{ Άρα, } \beta = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα, η $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \quad (1)$$

Υπολογίζουμε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$ με κριτήριο παρεμβολής

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \right| \cdot |\eta\mu x| \leq \left| \frac{1}{x} \right|, \text{ άρα } \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \left| \frac{1}{x} \right| \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} \right| &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\stackrel{\kappa\pi}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0. \text{ Επίσης, } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0. \\ &\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } (1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0. \text{ Έτσι, } \lambda = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \eta\mu x \quad (3)$$

Υπολογίζουμε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \eta\mu x$ με κριτήριο παρεμβολής $|e^x \cdot \eta\mu x| = |e^x| \cdot |\eta\mu x| = e^x \cdot |\eta\mu x| \leq e^x$. Άρα

$$|e^x \cdot \eta\mu x| \leq e^x \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \cdot \eta\mu x \leq e^x \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\stackrel{\kappa.π.}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \eta\mu x = 0. \text{ Οπότε } \beta = 0. \\ &\stackrel{(3)}{\Rightarrow} \end{aligned}$$

Άρα, η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Γ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) - x - \frac{1}{2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[-\pi, 0]$.

Στο ερώτημα Γ2 έχουμε δείξει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Έστω συνάρτηση $g(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$, ορισμένη στο $[-\pi, 0]$.

Η g είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε:

$$g(0) = f(0) - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

$$g(-\pi) = f(-\pi) - (-\pi) - \frac{1}{2} = e^{-\pi} \cdot \eta\mu(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = -e^{-\pi} \eta\mu\pi + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΠΥΛΑΙΑ ΡΕΘΥΜΝΟ

Άρα, $g(0) \cdot g(-\pi) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{1}{2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\xi \in (-\pi, 0)$.

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y = x + \frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Γ4. Είναι $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$, με $x(t) \geq 0$.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης x του M . Δηλαδή, ισχύει $y'(t_0) = x'(t_0)$.

$$\text{Είναι } y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} (x^2(t) + x(t))' = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

$$\text{Για } t = t_0 \text{ έχουμε } y'(t_0) = \frac{2x(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow$$

$$x'(t_0) = \frac{x'(t_0)(2x(t_0) + 1)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow 1 = \frac{2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2x(t_0) + 1 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}\right)^2 = (2x(t_0) + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2(t_0) + x(t_0)) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 \Leftrightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 \Leftrightarrow 0 = 1, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Επομένως, δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης x του M .

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι μια παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$, άρα $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x > 0$.

$$\text{Επίσης, για κάθε } x > 0 \text{ ισχύει } x \cdot f(x) = 2F(x) \cdot \ln x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2F(x) \ln x}{x} \quad (1)$$

Η συνάρτηση g για $x > 0$ γράφεται $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln x \ln x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln^2 x}}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{F'(x) \cdot e^{\ln^2 x} - F(x) \cdot (e^{\ln^2 x})'}{(e^{\ln^2 x})^2} = \frac{f(x) \cdot e^{\ln^2 x} - F(x) \cdot e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)'}{(e^{\ln^2 x})^2} \\ &= \frac{e^{\ln^2 x} [f(x) - F(x) \cdot 2 \ln x \cdot (\ln x)']}{(e^{\ln^2 x})^2} = \frac{f(x) - F(x) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{e^{\ln^2 x}} \stackrel{(1)}{=} \frac{\frac{2F(x) \cdot \ln x}{x} - \frac{2F(x) \cdot \ln x}{x}}{e^{\ln^2 x}} = 0. \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

$$\mathbf{\Delta 2. i)} \text{ Για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ έχουμε } f(x) = \frac{2F(x) \ln x}{x}.$$

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2F(x) \cdot \ln x}{x} \stackrel{\text{Ρουλεζ}}{=} \frac{2F(1) \cdot \ln 1}{1} = 0 = f(1), \text{ γιατί η } f \text{ είναι συνεχής στο } 1. \text{ Για } x > 0 \text{ ισχύει } xf(x) = 2F(x) \cdot \ln x$$

$$\text{επομένως } (xf(x))' = (2F(x) \cdot \ln x)' \Leftrightarrow f(x) + x \cdot f'(x) = 2f(x) \ln x + 2F(x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x) = 2xf(x) \cdot \ln x + 2F(x)$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΠΥΛΑΙΑ ΡΕΘΥΜΝΟ

$$\Leftrightarrow xf(x) = 2xf(x) \cdot \ln x + 2F(x) - x^2 f'(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{2xf(x) \ln x + 2F(x) - x^2 f'(x)}{x}$$

επομένως η f' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως πράξη συνεχών.

Η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x$, επομένως $f'(1) = 2$.

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot f'(x) = 1 \cdot 2 = 2$$

Β' τρόπος

Για $x > 0$ ισχύει ότι $xf(x) = 2F(x) \cdot \ln x$. Άρα, για $x = 1$ η τελευταία γίνεται $f(1) = 2F(1) \ln 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$. Η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x$, επομένως $f'(1) = 2$. Έτσι,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}{\frac{\ln x}{x - 1}} \quad (1)$$

Έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}} = \frac{2}{1} = 2$$

ii) Η F είναι συνεχής στο 1 ως παραγωγίσιμη, άρα $xf(x) = 2F(x) \ln x$ για $x > 0$, οπότε

$$F(x) = \frac{xf(x)}{2 \ln x}, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)}{2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1, \text{ άρα } F(1) = 1.$$

Β' τρόπος

$$\text{Για } x > 0 \text{ έχουμε } (xf(x))' = (2F(x) \cdot \ln x)' \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = 2f(x) \cdot \ln x + 2F(x) \cdot \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\text{Η (2) για } x = 1 \text{ γίνεται } f(1) + f'(1) = 2f(1) \cdot \ln 1 + 2F(1) \Leftrightarrow 0 + 2 = 2F(1) \Leftrightarrow F(1) = 1.$$

Η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$, άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$g(x) = c \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c \Leftrightarrow F(x) = c \cdot x^{\ln x}, x > 0.$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ έχουμε } F(1) = c \cdot 1^{\ln 1} \Leftrightarrow 1 = c.$$

$$\text{Άρα, } F(x) = x^{\ln x}, x > 0.$$

$$\Delta 3. \text{ Είναι } F'(x) = \left(x^{\ln x} \right)' = \left(e^{\ln x \cdot \ln x} \right)' = \left(e^{\ln^2 x} \right)' = e^{\ln^2 x} (\ln^2 x)'$$

$$= e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot (\ln x)' = e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} e^{\ln^2 x} \cdot \ln x$$

Για $x > 0$ έχουμε:

- $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} \cdot e^{\ln^2 x} \cdot \ln x = 0 \stackrel{\frac{2}{x} \cdot e^{\ln^2 x} > 0}{\Leftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$

- $F'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} \cdot e^{\ln^2 x} \cdot \ln x > 0 \stackrel{\frac{2}{x} \cdot e^{\ln^2 x} > 0}{\Leftrightarrow} \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΠΥΛΑΙΑ ΡΕΘΥΜΝΟ

$$\bullet \quad F'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} \cdot e^{\ln^2 x} \cdot \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Επομένως έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών

x	0	1	+
F'(x)		-	+
F(x)			

Επειδή η F είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ έχουμε ότι:

- η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$
- η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ έχει προφανή ρίζα τη $x = 1$.

Έχουμε:

- για $0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x \xrightarrow[\text{στο } (0,1)]{F \downarrow} F(x^2) > F(x)$
και $(x-1)^2 > 0$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $F(x^2) + (x-1)^2 > F(x)$.
- για $x > 1 \Rightarrow x^2 > x \xrightarrow[\text{στο } [1,+\infty)]{F \uparrow} F(x^2) > F(x)$
και $(x-1)^2 > 0$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $F(x^2) + (x-1)^2 > F(x)$.

Άρα, η $x = 1$ είναι μοναδική ρίζα της $F(x^2) + (x-1)^2 = F(x)$.

Δ4. Το εμβαδό του χωρίου μεταξύ των C_F , $x = 1$, $x = e$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(0) = \int_1^e |f(x)| dx$.

$$\text{Για } x \geq 1 \xrightarrow{F \uparrow} F(x) \geq F(1) \Leftrightarrow F(x) \geq 1, \text{ άρα } E(\Omega) = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e x^{\ln x} dx = \int_1^e e^{\ln x \cdot \ln x} dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x \geq x + 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα, $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

$$\text{Έτσι } \int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \Leftrightarrow E(\Omega) > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \quad (1).$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \bullet \quad \int_1^e \ln^2 x dx &= \int_1^e (x)' \ln^2 x dx = [x \cdot \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x (\ln^2 x)' dx \\ &= e \cdot \ln^2 e - 2 \int_1^e x \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = e - 2 \int_1^e \ln x dx = e - 2 \int_1^e (x)' \ln x dx = \\ &= e - 2 \left\{ [x \ln x]_1^e - \int_1^e x (\ln x)' dx \right\} = e - 2 \left\{ e \ln e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \right\} \\ &= e - 2 \left(e - \int_1^e 1 dx \right) = e - 2(e - [x]_1^e) = e - 2(e - (e - 1)) = e - 2(e - e + 1) = e - 2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \int_1^e 1 dx = [x]_1^e = e - 1 \quad (3)$$

$$\text{Άρα, } (1) \Rightarrow E(\Omega) > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx$$

$$\Leftrightarrow E(\Omega) > \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx \xrightarrow{(2),(3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(\Omega) > e - 2 + e - 1 \Leftrightarrow E(\Omega) > 2e - 3.$$