**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

• όλες οι συναρτήσεις της μορφής G(x) = F(x) + c, c ∈  , είναι παράγουσες της f στο Δ και

• κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή G(x) = F(x) +c, για κάποιο c ∈  .

**Μονάδες 6**

**Α2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

**Μονάδες 5**

**Α3.** Πότε η ευθεία x = x0 λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

**Μονάδες 4**

**Α4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** Έστω f : Α →  μια συνάρτηση η οποία είναι “1-1”. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης, f −1, της f είναι το σύνολο τιμών της f .

**β)** Αν f , g , h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η h (gf) , τότε ορίζεται και η  και ισχύει .

**γ)** Αν v ∈ , ισχύει ότι .

**δ)** Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

**ε)** Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο g(x0) , τότε η συνάρτηση f g είναι παραγωγίσιμη στο x0 και ισχύει 

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση , όπου α. Δίνεται ακόμα ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο x0 = 1.

**Β1.** Να βρείτε την τιμή του α .

**Μονάδες 5**

Στα ερωτήματα Β2 έως Β4 να θεωρήσετε ότι α = −6 .

**Β2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

**Μονάδες 10**

**Β3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 6**

**Β4.** Έστω g(x) = x + f(x), . Αν ξ, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία Α(ξ, f(ξ)) και Β(ξ, g(ξ)), αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα y’y.

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση



**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x 0 = 0 (μονάδες 2) αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x0  (μονάδες 4).

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη ξ∈(-π, 0).

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης y = f(x) , x ≥ 0, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M, x’(t) , να είναι θετικός για κάθε t ≥0 . Να εξετάσετε εάν υπάρχει χρονική στιγμή t0 ≥ 0 τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M.

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f : (0, +∞) →  και μια παράγουσα, F, της f στο (0, +∞) για τις οποίες ισχύει ότι:

x f(x) = 2F(x)lnx, για κάθε x > 0 .

Δίνεται ακόμα ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο M(1, f(1)) είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): y = 2x**.**

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  , είναι σταθερή.

**Μονάδες 6**

**Δ2. i)** Να υπολογίσετε το όριο . (μονάδες 4)

**ii)** Να αποδείξετε ότι F(1) = 1 (μονάδες 3) και F(x) = xlnx, για κάθε x > 0. (μονάδες 5)

**Μονάδες 9**

**Δ3.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση F (μονάδες 2) και να λύσετε την εξίσωση  στο διάστημα (0, +∞) (μονάδες 3).

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F, τις ευθείες x = 1, x = e και τον άξονα x’ x ισχύει E > 2e - 3.

**Μονάδες 5**