

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

$$\text{Επομένως, υπάρχει } \xi \in (x_1, x_2) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε λόγω της (1) ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$

- Αν $x_1 > x_2$, τότε όμοια αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$

Σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$

A2. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν ισχύει ότι:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

A3. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

A4.

- α) Λάθος
- β) Σωστό
- γ) Σωστό
- δ) Σωστό
- ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Για να ορίζεται η $f \circ g$ πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2, +\infty) \\ (\sqrt{x-2} + 1) \in (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2} + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > 2. \text{ Για } x > 2 \text{ έχουμε: } (f \circ g)(x) = f(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = f(\sqrt{x-2}) =$$

$$= 2 \ln(\sqrt{x-2}) = \ln(\sqrt{x-2})^2 = \ln(x-2)$$

Τελικά, $(f \circ g)(x) = \ln(x-2)$ με $D_{f \circ g} = (2, +\infty)$.

B2. Η h είναι συνεχής στο $(2, +\infty)$ ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμη με $h'(x) = \frac{1}{x-2}(x-2)' = \frac{1}{x-2} > 0$ για $x > 2$. Άρα, η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$, οπότε και $1-1$, έτσι η h αντιστρέφεται.

Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$ έχουμε $h((2, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right)$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΠΥΛΑΙΑ ΡΕΘΥΜΝΟ

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \stackrel{u=x-2}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+ \Rightarrow u \rightarrow 0} \ln u = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) \stackrel{u=x-2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$.

Επομένως, $h((2, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty)$

Για $x > 2$ και $y \in \mathbb{R}$ λύνουμε:

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln(x-2) \Leftrightarrow \ln e^y = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^y = x-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e^y + 2. \text{ Τελικά, } h^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

B3. Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-2) \cdot \frac{2\ln(x-1)}{x-2}. \text{ Έχουμε:}$$

- $\lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-2) \stackrel{u=x-2}{=} \lim_{x \rightarrow 2 \Rightarrow u \rightarrow 0} \ln u = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\ln(x-1)}{x-2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{d.l.h.}} \rightarrow 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\ln(x-1))'}{(x-2)'} =$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x-1} \cdot (x-1)'}{1} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\text{Τελικά, } \lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Επειδή η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Αν $\kappa \neq 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \kappa \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \begin{cases} +\infty & , \text{ αν } \kappa > 0 \\ -\infty & , \text{ αν } \kappa < 0 \end{cases}$, το οποίο είναι άτοπο γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Άρα, $\kappa = 0$.

ii) Για $\kappa = 0$ έχουμε $f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$

Επειδή η $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων ισχύει ότι $f'(0) = 1$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως ρητή και παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\mu x)'(x^2 + 1) - \mu x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu(x^2 + 1) - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu - \mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{\mu(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}. \text{ Επομένως,} \end{aligned}$$

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu}{1} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1.$$

Γ2. i) Είναι $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ με $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα τιμών έχουμε ότι

- για $x \in (-\infty, -1)$ είναι $f'(x) < 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$
- για $x \in (-1, 1)$ είναι $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$
- για $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

Επίσης,

- για $x = -1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(-1) = -\frac{1}{2}$
- για $x = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή $f(1) = \frac{1}{2}$

ii) Έστω $\Delta_1 = (-\infty, -1)$, όπου η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

$$\text{Επομένως, } f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$$

Είναι

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2 + 1} = -\frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\text{Οπότε, } f(\Delta_1) = \left(-\frac{1}{2}, 0 \right)$$

Έστω $\Delta_2 = [-1, 1]$, όπου η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

$$\text{Επομένως, } f(\Delta_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

Έστω $\Delta_3 = (1, +\infty)$, όπου η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

$$\text{Επομένως, } f(\Delta_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) =$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$

$$\text{Επομένως, } f(\Delta_3) = \left(0, \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Τελικά, } f(D_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ ψάχνουμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha^2 + \frac{1}{2}$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΠΥΛΑΙΑ ΡΕΘΥΜΝΟ

Για κάθε $\alpha \neq 0$ είναι $\alpha^2 > 0$ άρα $\alpha^2 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha^2 + \frac{1}{2}$ είναι αδύνατη.

Αν $\alpha = 0$ τότε η εξίσωση γράφεται $f(x) = \frac{1}{2}$ η οποία όπως προκύπτει από τον πίνακα μεταβολών και την ύπαρξη του μεγίστου, η $f(x) = \frac{1}{2}$ έχει μοναδική λύση (την $x = 1$).

Γ3. i) Έχουμε:

$$\begin{aligned} I_v + I_{v+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(v+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}(x^2+1)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{2v+1} dx = \\ &= \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2v+2} \end{aligned}$$

ii) Είναι $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2}$ (1). Έχουμε:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Η (1) για } v=0 \text{ γίνεται: } I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - I_0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \Leftrightarrow I_1 = \frac{1 - \ln 2}{2} \quad (3)$$

$$\text{Η (1) για } v=1 \text{ γίνεται: } I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1$$

$$\stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1 - \ln 2}{2} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{2 - 2 \ln 2}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{2 \ln 2 - 1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Επειδή η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έχουμε ότι η g είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επίσης, από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$0 < g(x) < 1 \quad (1) \quad \text{και} \quad g'(x) + 1 \neq 0 \quad (2)$$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$ ορισμένη στο $[-1, 0]$

Η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πράξεις συνεχών με

- $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$ (λόγω της (1))
- $h(0) = g(0) > 0$ (λόγω της (1))

Άρα, $h(-1) \cdot h(0) < 0$. Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΠΥΛΑΙΑ ΡΕΘΥΜΝΟ

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ λόγω της (2) και η h' είναι συνεχής γιατί από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι η g' είναι συνεχής. Επομένως, η h' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $h'(x) > 0$ ή $h'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η h είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, επομένως η $x_1 \in (-1, 0)$ μοναδική ρίζα της $h(x) = g(x) + x = 0$.

Β' Τρόπος

Για τη μοναδικότητα του Δ_1

Έστω ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ με $\rho_1 < \rho_2$.

Τότε $h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$

Η h είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ (από την υπόθεση) και $h(\rho_1) = h(\rho_2)$.

Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0$, που είναι άτομο γιατί $h'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) + x = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, άρα παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$, οπότε

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x(g(x) + x) = 0 \\ \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \cdot \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - \kappa \right) \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ορίου έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} &= 1 \\ \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon\varphi x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Έτσι, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \cdot \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - \kappa \right) = 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa.$$

$$\text{Επομένως: } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow 0 = 3 - \kappa \Leftrightarrow \kappa = 3.$$

Δ_3 . i) Για $\kappa = 3$ η συνάρτηση γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x) & , x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x & , x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = (2 \cdot \eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)' = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή του κλάσματος με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΠΥΛΑΙΑ ΡΕΘΥΜΝΟ

2	-3	0	1	1
2	2	-1	-1	
2	-1	-1	0	

Έτσι, έχουμε: $2\sigma\upsilon\nu^3x - 3\sigma\upsilon\nu^2x + 1 = (\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2x - \sigma\upsilon\nu x - 1)$

Βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου $2\sigma\upsilon\nu^2x - \sigma\upsilon\nu x - 1$.

Το τριώνυμο έχει $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$, οπότε: $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1 \pm 3}{2 \cdot 2} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

Επομένως, ο αριθμητής της παραγώγου της f γράφεται:

$$2\sigma\upsilon\nu^3x - 3\sigma\upsilon\nu^2x + 1 = (\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2x - \sigma\upsilon\nu x - 1) =$$

$$= (\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot 2(\sigma\upsilon\nu x - 1) \left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 2(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 \left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2} \right) > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2} \right)$. Έτσι, για $x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

Β' Τρόπος

Για το Δ_3 i)

Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right)$ η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x)' = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3x - 3\sigma\upsilon\nu^2x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2x}$$

Έστω $\varphi(x) = 2\sigma\upsilon\nu^3x - 3\sigma\upsilon\nu^2x + 1$ ορισμένη στο $\left[0, \frac{\pi}{2} \right)$ με $\varphi(0) = 0$.

Η φ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2} \right)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη με:

$$\varphi'(x) = 6\sigma\upsilon\nu^2x(\sigma\upsilon\nu x)' - 6\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x)' = -6\sigma\upsilon\nu^2x \cdot \eta\mu x + 6\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x =$$

$$= 6\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x(1 - \sigma\upsilon\nu x) > 0 \text{ για } x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \text{ αφού για } x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \text{ είναι } \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x > 0 \text{ και } 0 < \sigma\upsilon\nu x < 1.$$

Επομένως, η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2} \right)$. Έτσι,

$$x \geq 0 \Leftrightarrow \varphi(x) \geq \varphi(0) \Leftrightarrow \varphi(x) \geq 0 \text{ και η ισότητα ισχύει μόνο για } x = 0.$$

Έτσι, για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right)$ είναι $f'(x) \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2} \right)$, άρα $x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.

ii) Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $3 \cdot f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$ έχει ακριβώς μία ρίζα x_2 .

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2} \right)$, επομένως:

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right)$$

Έχουμε:

- $f(0) = 2 \cdot \eta\mu 0 - \epsilon\phi 0 - 3 \cdot 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2 \cdot \eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [(2\eta\mu x - 3x) + \epsilon\phi x]$

Υπολογίζουμε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x - 3x) = 2 \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} - 3 \cdot \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{3\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \epsilon\phi x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \eta\mu x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty$

γιατί $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sigma\upsilon\nu x = 0$ με $\sigma\upsilon\nu x > 0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$.

$$\text{Τελικά, } f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [0, +\infty)$$

Το $\frac{\pi}{3} \in f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ και επειδή η f είναι γνησίως

αύξουσα η εξίσωση $f(x) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3 \cdot f(x) = \pi$, έχει μοναδική ρίζα x_2 .

Δ4. i) Είναι $h(x) = g(x) + x$ ορισμένη στο $[x_1, 0]$ και στο $(x_1, 0]$ η h είναι συνεχής με $h(x) = g(x) + x \neq 0$ γιατί η $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη x_1 . Επομένως, η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(x_1, 0]$.

Όμως $h(0) = g(0) > 0$, οπότε $h(x) = g(x) + x > 0$ στο διάστημα $(x_1, 0]$. Οπότε $h(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$.

Επίσης, είναι $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως $x^2 \cdot h(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2(g(x) + x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ στο διάστημα $[x_1, 0]$.

ii) Έχουμε ότι $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, \frac{\pi}{2})$ και ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, \frac{\pi}{2})$

άρα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, \frac{\pi}{3}]$. Επομένως,

$$E(\Omega) = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$$

Επειδή ο άξονας y χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία ισχύει ότι

$$\int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$$

Υπολογίζουμε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx - 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} x dx =$$

$$= -2[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{3}} - [\ln(\sigma\upsilon\nu x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{3}{2}[x^2]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -2\left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu 0\right) - \left(\ln\left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}\right) - \ln(\sigma\upsilon\nu 0)\right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{9} =$$

$$= -2\left(\frac{1}{2} - 1\right) - \ln \frac{1}{2} + \ln 1 - \frac{\pi^2}{6} = -2\left(-\frac{1}{2}\right) - (\ln 1 - \ln 2) - \frac{\pi^2}{6} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΠΥΛΑΙΑ ΡΕΘΥΜΝΟ

Έτσι, έχουμε:

$$\int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx = [x^3 \cdot g(x)]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 (x^3)' \cdot g(x) dx = 0 - x_1^3 \cdot g(x_1) - 3 \int_{x_1}^0 x^2 \cdot g(x) dx \quad (1)$$

$$\text{Έχουμε από το } \Delta_1 \text{ ότι } g(x_1) + x_1 = 0 \Rightarrow g(x_1) = -x_1 \quad (2)$$

και για $x \in (-\infty, 0)$ άρα και για $x \in (x_1, 0)$ ότι:

$$f(x) = x^2(g(x) + x) \Leftrightarrow f(x) = x^2 \cdot g(x) + x^3 \Leftrightarrow x^2 \cdot g(x) = f(x) - x^3 \quad (3)$$

$$\text{Έτσι, (1)} \Rightarrow \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx$$

$$= -x_1^3 \cdot (-x_1) - 3 \int_{x_1}^0 (f(x) - x^3) dx =$$

$$= x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx + \frac{3}{4} [x^4]_{x_1}^0 = x_1^4 + \frac{3}{4} (0 - x_1^4) - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx =$$

$$= x_1^4 - \frac{3}{4} x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx = \frac{x_1^4}{4} - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx \quad (4)$$

$$\text{Είναι } \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \quad (5)$$

$$\text{Τελικά, (4)} \Rightarrow \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} - 3 \left(1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \right) =$$

$$= \frac{x_1^4}{4} + \frac{3\pi^2}{6} - 3 - 3\ln 2 = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3.$$

Β' Τρόπος

Για το Δ_4 ii)

Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι η g' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$. Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, γιατί και η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επομένως, η h διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Η h είναι συνεχής στο $[x_1, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_1, 0)$.

$$\text{Από το Θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi \in (x_1, 0) \text{ τέτοιο ώστε: } h'(\xi) = \frac{h(0) - h(x_1)}{0 - x_1} \stackrel{h(x_1)=0}{=} \frac{h(0)}{-x_1} > 0$$

γιατί $x_1 < 0$ και $h(0) = g(0) > 0$.

Επειδή η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(x_1, 0]$ και $h'(\xi) > 0$ με $\xi \in (x_1, 0)$ είναι $h'(x) > 0$ στο $[x_1, 0]$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, 0]$. Έτσι, $x \geq x_1 \stackrel{h \nearrow}{\Leftrightarrow} h(x) \geq h(x_1) \Leftrightarrow h(x) \geq 0$.

Επίσης, $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως για $x \in [x_1, 0]$ είναι $x^2 h(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.

Γ' Τρόπος

Για το Δ_4 ii)

Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι η g' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$. Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, γιατί και η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επομένως, η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $h'(x) > 0$ ή $h'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή η h είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$. Είναι $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$ και $h(1) = g(1) + 1 > 0$.

Άρα, $h(-1) < 0 < h(1)$. Είναι $-1 < 1$ με $h(-1) < h(1)$ και επειδή η h είναι γνησίως μονότονη, έχουμε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[x_1, 0]$. Έτσι, $x \geq x_1 \stackrel{h \nearrow}{\Leftrightarrow} h(x) \geq h(x_1) \Leftrightarrow h(x) \geq 0$.

Επίσης, $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως για $x \in [x_1, 0]$ είναι $x^2 h(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.